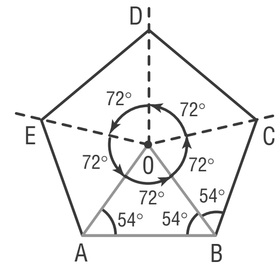
7.1 Polygones réguliers

ACTIVITÉ 1 Création d'un polygone régulier

a) Le triangle A0B ci-contre est isocèle de sommet principal 0. L'angle A0B mesure 72°. La rotation *r* de centre 0 et d'angle 72° dans le sens antihoraire, appliquée sur le triangle A0B puis à ses images successives, permet d'engendrer le pentagone ABCDE de centre 0.



1. Explique pourquoi les côtés AB, BC, CD, DE et EA du pentagone sont congrus.

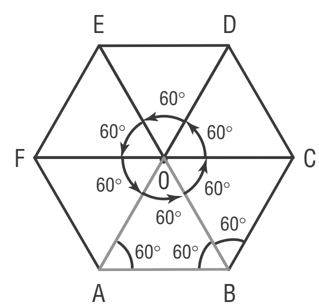
   La rotation étant une isométrie, les quatre triangles images obtenus sont congrus au triangle initial A0B. Les côtés AB, BC, CD, DE et EA sont donc congrus.

2. Les angles ABC, BCD, CDE, DEA et EAB sont les angles intérieurs du pentagone. Explique pourquoi les cinq angles intérieurs sont congrus et mesurent chacun 108°.

   Le triangle A0B étant isocèle, les angles à la base, 0AB et 0BA, sont congrus et mesurent chacun 54°.

   Les cinq triangles étant isocèles et congrus, on en déduit que tous les angles intérieurs du polygone mesurent chacun 108° (2 × 54°).

b) Le triangle A0B ci-contre est équilatéral. La rotation *r* de centre 0 et d'angle 60° dans le sens antihoraire, appliquée sur le triangle A0B puis à ses images successives, permet d'engendrer l'hexagone ABCDEF de centre 0.



1. Explique pourquoi les côtés AB, BC, CD, DE, EF et FA de l'hexagone sont congrus.

   La rotation étant une isométrie, les cinq triangles images obtenus sont congrus au triangle initial A0B. Les côtés AB, BC, CD, DE, EF et FA sont donc congrus.

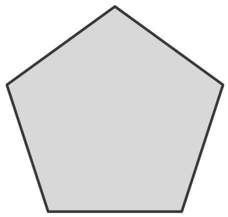
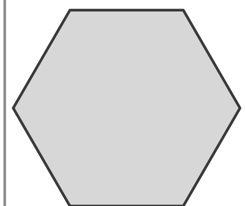
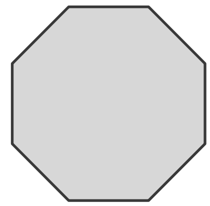
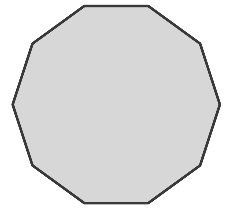
2. Explique pourquoi les six angles intérieurs ABC, BCD, CDE, DEF, EFA et FAB sont congrus et mesurent chacun 120°.

   Le triangle A0B étant équilatéral, les angles à la base, 0AB et 0BA, sont congrus et mesurent chacun 60°.

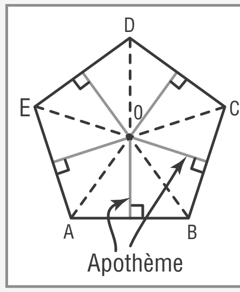
   Les six triangles étant équilatéraux, on en déduit que tous les angles intérieurs du polygone mesurent chacun 120° (2 × 60°).

POLYGONE RÉGULIER

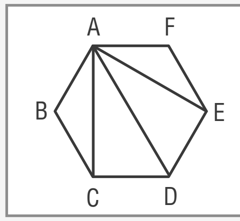
- Un polygone est **régulier** si tous ses côtés et tous ses angles intérieurs sont **congrus**.
  On distingue :

Nom du polygone	Pentagone régulier	Hexagone régulier	Octogone régulier	Décagone régulier
Nombre de côtés	5	6	8	10
Figure				

- Un polygone **régulier** de centre 0 à n côtés est composé de n triangles isocèles congrus de sommet principal 0. La hauteur de chaque triangle isocèle issue du sommet principal est appelée **apothème**.



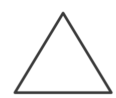
- Une **diagonale** d'un polygone est un segment qui relie deux sommets non consécutifs du polygone.
  Ex. : À partir du sommet A de l'hexagone ABCDEF, sont tracées trois diagonales AC, AD et AE.



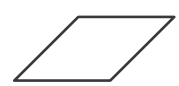
1. a) Construis un triangle ayant ses trois côtés congrus.

b) Les angles intérieurs de ce triangle sont-ils congrus ? ***Oui***

c) Quel nom donne-t-on à ce type de triangle ? ***Triangle équilatéral***

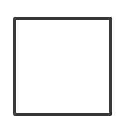


2. a) 1. Construis un quadrilatère dont les quatre côtés sont congrus et dont les quatre angles intérieurs ne sont pas tous congrus.
2. Comment appelle-t-on ce type de quadrilatère ? ***Un losange***

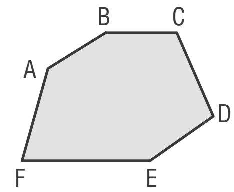


b) 1. Construis un quadrilatère dont les quatre angles intérieurs sont congrus et dont les quatre côtés ne sont pas tous congrus.
2. Comment appelle-t-on ce type de quadrilatère ? ***Un rectangle***

c) 1. Construis un quadrilatère dont les quatre côtés et les quatre angles intérieurs sont congrus.
2. Comment appelle-t-on ce type de quadrilatère ? ***Un carré***



3. On considère ci-contre l'hexagone ABCDEF.



a) Combien de diagonales peut-on construire à partir du sommet A? ***3***

b) En combien de triangles le polygone est-il partagé par les diagonales tracées à partir du sommet A? ***4***

c) Quelle est la somme des angles intérieurs d'un hexagone? ***720°***

d) Quelle est la mesure d'un angle intérieur si l'hexagone est régulier? Justifie ta réponse.
120°, puisque les angles intérieurs sont congrus (720° ÷ 6 = 120°).

4. Vrai ou faux?
Dans un polygone régulier,

a) tous les côtés sont congrus. ***Vrai***

b) tous les angles intérieurs sont congrus. ***Vrai***

c) toutes les diagonales sont congrues. ***Faux***

d) toutes les apothèmes sont congrues. ***Vrai***

ACTIVITÉ 2 Angles intérieurs d'un polygone régulier

a) Complète le tableau suivant.

Polygone régulier	Nombre de côtés	Nombre de diagonales issues d'un sommet	Somme des mesures des angles intérieurs	Mesure d'un angle intérieur
Pentagone régulier	***5***	***2***	***540°***	***108°***
Hexagone régulier	***6***	***3***	***720°***	***120°***
Octogone régulier	***8***	***5***	***1 080°***	***135°***
Décagone régulier	***10***	***7***	***1 440°***	***144°***
Polygone régulier	n	$n - 3$	$(n - 2) \times 180°$	$\frac{(n-2) \times 180°}{n}$

b) Un polygone régulier possède n côtés.

1. Combien de diagonales peut-on tracer à partir d'un sommet? $n - 3$
2. En combien de triangles les diagonales issues d'un même sommet partagent-elles le polygone? $n - 2$
3. Quelle est donc la somme des angles intérieurs? $(n - 2) \times 180°$
4. Quelle est la mesure d'un angle intérieur? $\frac{(n-2) \times 180°}{n}$

ANGLE INTÉRIEUR D'UN POLYGONE RÉGULIER

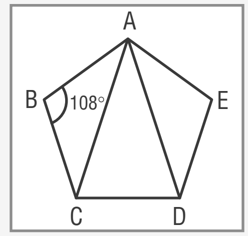
- Soit un polygone **régulier** qui a n **côtés**.
  – La somme S des mesures des angles intérieurs d'un polygone est :

$$\boxed{S = (n - 2) \times 180°}$$

  – La mesure a d'un angle intérieur d'un polygone régulier est :

$$\boxed{a = \frac{(n-2) \times 180°}{n}}$$

Ex. : Soit le pentagone régulier ABCDE.
– Les diagonales issues du sommet A divisent le polygone en trois triangles.
– La somme S des mesures des angles intérieurs est : S = 540°.
– La mesure a d'un angle intérieur est donc : $a = \frac{540°}{5} = 108°$.



5. Quelle est la somme des mesures des angles intérieurs

a) d'un rectangle ? ***360°*** b) d'un hexagone ? ***720°*** c) d'un octogone ? ***1 080°***

6. Quel est le nombre de côtés d'un polygone dont la somme des angles intérieurs est

a) 180° ? ***3 côtés*** b) 900° ? ***7 côtés*** c) 3 240° ? ***20 côtés***

7. Détermine la mesure d'un angle intérieur d'un

a) hexagone régulier. ***120°*** b) octogone régulier. ***135°***

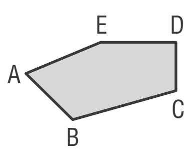
c) décagone régulier. ***144°*** d) dodécagone régulier. ***150°***

8. Quel polygone régulier a des angles intérieurs mesurant

a) 60° ? ***Triangle équilatéral*** b) 90° ? ***Carré*** c) 144° ? ***Décagone***

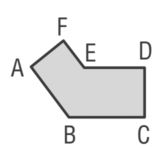
9. Un polygone est convexe lorsque chacun de ses angles intérieurs mesure moins de 180°. Dans le cas contraire, il est dit « concave ». Détermine si les polygones suivants sont convexes ou concaves :

a)



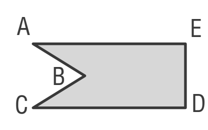
Convexe

b)



Concave

c)



Concave

10. a) Quatre des angles intérieurs d'un pentagone mesurent respectivement 140°, 100°, 80° et 60°. Le pentagone est-il convexe ou concave ? Justifie ta réponse.

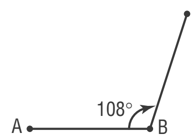
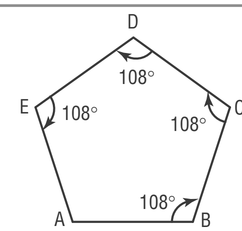
Convexe, car le 5^e angle mesure 160° et chaque angle mesure moins de 180°.

b) Cinq des angles intérieurs d'un hexagone mesurent respectivement 120°, 140°, 80°, 70° et 100°. Cet hexagone est-il convexe ou concave ? Justifie ta réponse.

Concave, car le 5^e angle mesure 210°.

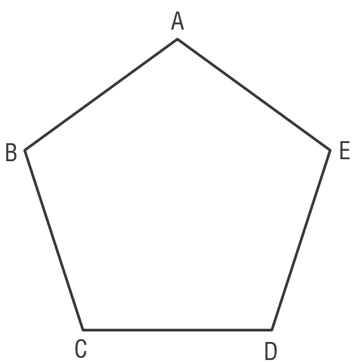
CONSTRUCTION D'UN POLYGONE RÉGULIER

La méthode ci-dessous permet de construire un pentagone régulier dont chacun des côtés mesure 1,5 cm.

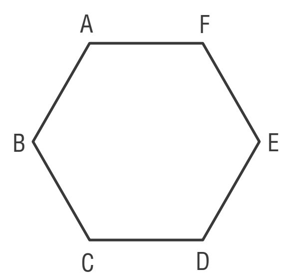
1	2	3	4
On détermine la mesure a d'un angle intérieur qui est aussi l'angle de rotation.	On trace un segment AB qui mesure 1,5 cm.	On fait effectuer au segment AB une rotation de centre B dans le sens horaire selon un angle de 108°.	On continue de la même façon en faisant faire des rotations de 108° au dernier segment tracé. On achève ainsi la construction du pentagone régulier.
• $a = \frac{(5-2) \times 180°}{5}$ • $a = 108°$			

11. Construis les polygones réguliers suivants.

a) Un pentagone régulier de 2,5 cm de côté



b) Un hexagone régulier de 1,5 cm de côté

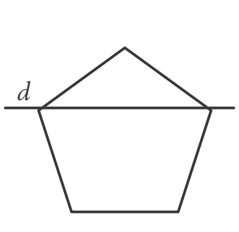


ACTIVITÉ 3 Axes de symétrie d'un polygone régulier

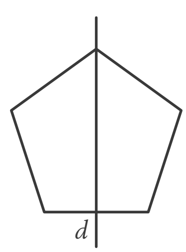
a) Étant donné une figure géométrique et une réflexion, comment appelle-t-on l'axe de réflexion pour cette figure si celle-ci coïncide avec son image par la réflexion?

Un axe de symétrie pour la figure

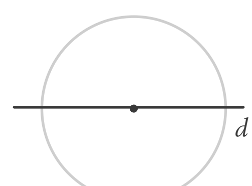
b) Indique si la droite d est un axe de symétrie pour la figure dans chacun des cas suivants:



Non



Oui



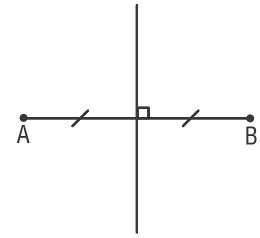
Oui

c) On considère le segment AB ci-contre.

1. Comment appelle-t-on l'axe de symétrie d'un segment?

   La médiatrice du segment

2. Trace l'axe de symétrie de ce segment.

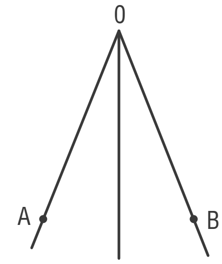


d) On considère l'angle A0B ci-contre.

1. Comment appelle-t-on l'axe de symétrie d'un angle?

   La bissectrice de l'angle

2. Trace l'axe de symétrie de cet angle.

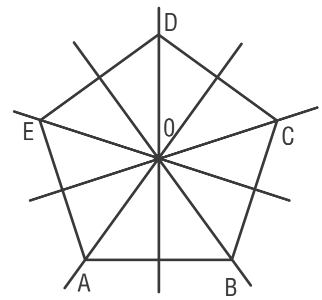


e) On considère le pentagone régulier ABCDE ci-contre, de centre 0.

1. Trace la médiatrice du côté AB.
2. Que représente cette médiatrice pour le pentagone?

   Un axe de symétrie

3. Trace la médiatrice de chacun des côtés du pentagone et vérifie que chaque médiatrice est un axe de symétrie du pentagone et que les cinq médiatrices passent par le centre 0 du pentagone.

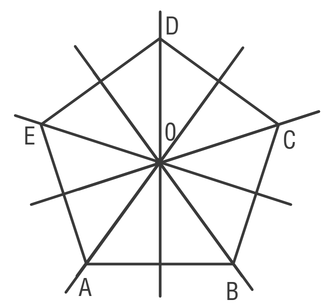


f) On considère le pentagone régulier ABCDE ci-contre, de centre 0.

1. Trace la bissectrice de l'angle intérieur ABC.
2. Que représente cette bissectrice pour le pentagone?

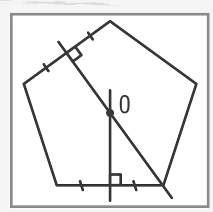
   Un axe de symétrie

3. Trace la bissectrice de chaque angle intérieur du pentagone et vérifie que chaque bissectrice est un axe de symétrie du pentagone et que les cinq bissectrices passent par le centre 0 du pentagone.

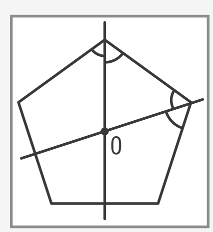


AXE DE SYMÉTRIE D'UN POLYGONE RÉGULIER

- La **médiatrice** de chacun des côtés d'un polygone régulier est un **axe de symétrie** du polygone.

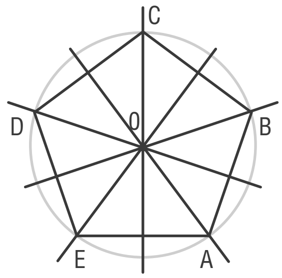


- La **bissectrice** de chaque angle intérieur d'un polygone régulier est un **axe de symétrie** du polygone.
- Le point d'intersection des axes de symétrie est le centre 0 du polygone régulier.

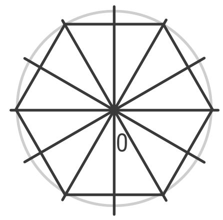


12. a) Trace tous les axes de symétrie des polygones réguliers suivants :

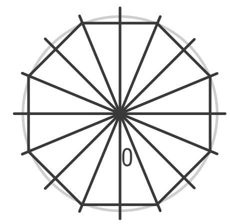
1.



2.



3.



b) Vérifie que les axes de symétrie passent tous par un même point. Comment appelle-t-on ce point ?

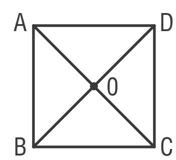
Le centre 0 du polygone régulier

c) Soit A, un sommet quelconque du pentagone régulier (figure 1 ci-dessus).

1. Trace le cercle ayant pour centre le centre du pentagone régulier et ayant 0A pour rayon.
2. Vérifie que ce cercle passe par les autres sommets du pentagone. Un tel cercle est appelé cercle **circonscrit** au pentagone.

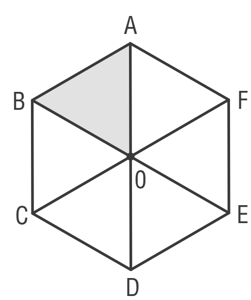
d) Trace le cercle circonscrit de chaque polygone régulier.

13. a) Dans le carré ABCD ci-contre de centre 0, on considère le triangle A0B.



1. Explique pourquoi m ∠BA0 = 45° ***La diagonale AC est un axe de symétrie du carré, donc m ∠BA0 = m ∠DA0 =*** $\frac{90°}{2}$ ***= 45°.***
2. Explique pourquoi m ∠AB0 = 45° ***La diagonale BD est un axe de symétrie du carré, donc m ∠AB0 = m ∠CB0 =*** $\frac{90°}{2}$ ***= 45°.***
3. Quelle est donc la mesure de ∠A0B ? Justifie ta réponse. ***90°, car la somme des mesures du triangle A0B est 180°.***
4. Quelle est donc la nature du triangle A0B ? ***C'est un triangle rectangle isocèle.***

b) Dans l'hexagone ABCDEF de centre 0, on considère le triangle A0B.
Montre que le triangle A0B est équilatéral.



La diagonale AD est un axe de symétrie (bissectrice),

donc m ∠BA0 = $\frac{120°}{2}$ ***= 60°.***

La diagonale BE est un axe de symétrie (bissectrice),

donc m ∠AB0 = $\frac{120°}{2}$ ***= 60°.***

On en déduit que m ∠A0B = 60°, car la somme des mesures des angles d'un triangle est 180°.

Le triangle A0B est donc équilatéral, car chaque angle mesure 60°.